

Gasadh an Phlána.

1. Gasadh

Nuair a castar roth timpeall ar acastóir shocair, ní athraíonn ionad an rotha iomláin sa spás cé go ngluaiseann na pointí difriúla den roth sin. Is amhlán ^{adh} go nglacann gach pointe P , de bharr casta áirithe, an t -uimhir ina raibh pointe éigin eile Q den roth sinne sin. Nuair nach miste ~~neamshuim~~ a dhéanamh den tiús agus an roth a shamhlú mar dhoigh ~~dhe~~ gur plána fíochtaí phlánaigh a bhí ann, tig linn a rá go dtéarmaíonn plána an rotha air féin.

Mar an gcéanna, is féidir plána géaméadrach a shleamniú air féin ^{ionas} ~~ionas~~ go gcoinnítear pointe amháin ⁰ (agus gearradh an pointe sin) socair. Tugtar gasadh an phlána timpeall 0 ar an ngluaiseacht sin.

Tig linn an ngluaiseacht úd a léiriú mar seo ~~le~~ leannas. Leag páipear trí-shoillseach annas ar pháipear eile atá ar an mbord, agus saith biorán thiothú ag pointe O . Línigh fíochtaí ar bith ar an bpáipear isochtaigh agus tianúigh an fhíochtaí cheanna ar an bpáipear trí-shoillseach. Má coinnítear an páipear thíos socair le linn diúnna an ceann eile a shleamniú air, timpeall O , léitíonn sé sin céim chaoi a n-athraítear ionad na fíochtaí de bharr casta áirithe.

Cé go bhfuil dhá pháipear san léiriú, is mar aon ^{deántear} plána amháin a samhlaítear ~~diúnna~~ iad, mar ^{cuirtear} ~~neaspis de thús na bpáipear~~ ~~tiús na bpáipear is leathabha~~. Comhairlítear don léitheoir an modh sin a chleachtadh go mbeid eolas maith aige ar chasadh an phlána. Is ceart dó go h-áirithe a dó nó a trí de (i) phointí, (ii) de dhronlínte $tré O$, (iii) de chiorcail ar lár dóibh O , (iv) de dhronlínte nach ngabhann $tré O$, u ghrinnín, féachaint céard a bhaineas dóibh de bharr na gasadh ndifriúil timpeall O .

Is é O éir an rotha an t -uimhir phointe amháin nac mbogann

g

~~de thús na bpáipear~~
~~de thús na bpáipear~~

2. Dhá threo an chasta . casadh iomlán

Ag trácht ^{áirithe} diúir ar chasadh timpeall O , tá dhá chasadh ina bhfeadtaí pointe (nó dronlíne, etc.) a shanklú;
 (i) mar ionad tosaigh an pointe (nó na dronlíne) sin féin, nó (ii) mar ionad deitidh pointe (nó dronlíne) eigin eile de bharr an chasta.
 Beidh sé soiléir i geomhnaí cé acu den dá chiall sin a bheas i geist.

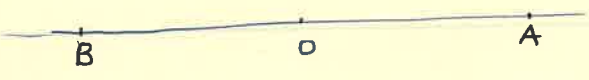
(u) i n-athraíocht threo
 pha an chluig
 (v) i geomhnaíocht lea.

Tá dhá threo chontrártha ann chun plána a chasadh ionataí;
 (a) nuair is in aghaidh ^{tréimh shnáthaidé} an chluig a castar an plána, agus (b) casadh ^{i geomhnaíocht} ~~in an~~ ^{le} leo. D'fhonn ^{idirdhealú} idir an dá threo sin tugtar casadh deimhneach ar (a), agus casadh diúltach ar (b).

ionas
 ^

Is soiléir gur féidir an plána a chasadh timpeall ar pointe ar bith O , go gcuirtear gach pointe (agus gach fíorpháirt) ar ais mar a raibh sé i dtosach ^{Jugtar} ~~de~~ ^{casadh iomlán} an gcasadh is luí a dhéanfaidh sé sin.

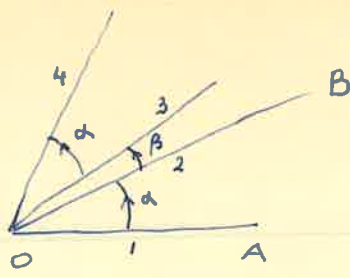
Tá casadh eile ann a chuireas OA ar OB (agus a chuireas OB ar OA) áit gur dronlíne ar bith tré O i AOB , ionas



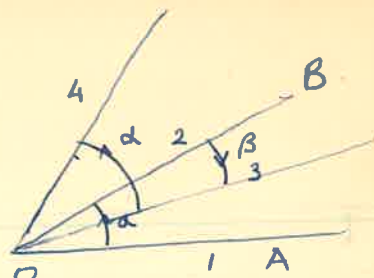
naech n-athraíonn ionad na dronlíne iomláine ~~de~~ bharr, cé go n-athraítear pointe éagsúla na dronlíne sin go léir, cé is moite de O .
 Is cuma deimhneach nó diúltach don chasadh sin, sé an cás céanna é maidir le pointe ar phlána, agus má cuirtear i ngníomh in athuais é is ionann é sin agus casadh iomlán. Tugtar a leath de chasadh iomlán ar an gceann sin.

3. Milleacha

Bhun dronlíne a h-aor (sa léaráid) a leagan aruas ar dronlíne a dó, leadaíonn casadh áirithe timpeall O , agus sé a chontrártha sin a chuireas dronlíne 2 ar dronlíne 1.



I



II

Sonntú

Is ionann an nulle idir na dtiontí OA is OB agus méad an chosla (timpeall a bpointe leagmhála) a chuireas OA fan OB. 'Siad na línte OA, OB gága na h uilleann, agus 'se 0 an tinn.

Tabhair fá deara nach bhfuil baint ar bith idir méad na h uilleann agus fad na ngéag.

Má tharlaíonn go leagtar líne 3 ar líne 4 de bheart an chosla a chuireas líne 1 ar líne 2, deirtear go bhfuil an nulle idir na línte 1 is 2 cothrom, nó ar comhméad, leas an uiltinn idir na línte 3 is 4. [Scríobhtar an nod = in áit "cothrom le".]

Biallaíonn $\hat{A}\hat{O}\hat{B}$ an nulle idir OA is OB ach is a chomathú le litir gréigise α (nó, β, γ , etc.) is mó a déanfar sa leabhar seo:

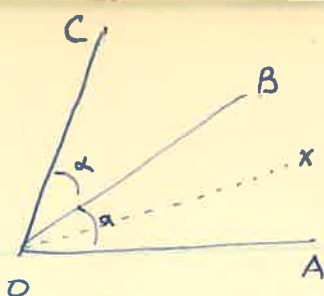
1. $\hat{A}\hat{O}\hat{B} = \hat{\alpha}$ i bhfig. I, II.

Bhun dtiontí 1 a leagan aruas ar dtiontí 3, níot mhór casadh $\hat{\alpha}$ i dtosach agus casadh eile $\hat{\beta}$ ina dhiaidh sin, gur b ionann cheile iad agus casadh singil áirithe timpeall 0. Ní léir dúinn roimh ré céard a bhaineas do dtiontí 2 de bheart na gluaiseachta sin, ach is féidir é sin a thriail le fáil na trí-shoilleadh. Gheofar amach gur aruas go cruinn ar dtiontí 4 a leagtar i, rud a dtéastaíonn casadh $\hat{\beta}$ i dtosach agus casadh $\hat{\alpha}$ ina dhiaidh sin chuige. 'Se sin le rá, is cuma cé acu den dá chasadh $\hat{\alpha}$ is $\hat{\beta}$ a cuirtear i ngníomh i dtosach, is ionann cheile iad agus casadh singil áirithe.

Fágann sin nach miste casadh timpeall an bpointe chéanna 0 (agus na h uilleacha a fhreagraíós dóibh) a shuimú is a dtéalú, agus beidh $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = \hat{\beta} + \hat{\alpha}$ fearacht na ngnáth-nimhreacha. Léitíonn Fig. II go bhfuil $\hat{\alpha} - \hat{\beta} = -\hat{\beta} + \hat{\alpha}$.

Na h uilleacha $2\hat{\alpha}, 3\hat{\alpha}, \frac{1}{2}\hat{\alpha}$.

Nuair cestar OA go dté OB, abar gur b OC ionad nua

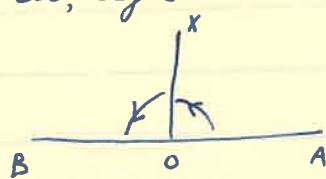


na dronlín a bhí fan na líne OB i dtosach. Is léir nár mhór an casadh á faoi dhó chun OA a leagan ar OC; .i. tá $\widehat{OAC} = 2\hat{\alpha}$. Is féidir na h-uilleacha $3\hat{\alpha}$, $4\hat{\alpha}$ etc., a mhíniú ar an geama chéanna.

Tá dronlín chinnteach OX ann freisin a ghníos an uille $\frac{1}{2}\hat{\alpha}$ le OA. Teaspáinfead i gbaib. III cé'n chaoi a n-ainsítear ionad OX. Deirtear go geoinnreann sí an uille \widehat{AOB} .

4. An Dronuille

Uilleacha cómhgaracha ~~is~~ uilleacha a bhfuil cómhghéag acu, agus uille acu ar gach aon taobh den chómhghéag sin.



Má sheasann dronlín OX ar cheann eile AB ionas gur cómhéad don dá uillinn chómhgaracha, ~~is~~ ^{is é} an t-aon chasadh ambain a chuireas OA fan OX, nó a chuireas OX fan OB. Is léir gur b ionann an casadh sin faoi dhó agus a leath de ~~rothlín~~ ^{casadh} ronnán. Tugtar dronuille ar gach uillinn den dá uillinn chothroca, chómhgaracha ionas gur mar a chéile casadh ronnán agus casadh ~~le~~ ^{le} chéile dronuilleacha. (Ananta tugtar uille dhéach ar dhá dronuilleán). Deirtear go bhfuil OX agus AB ingearach le chéile má's dronuilleacha iad \widehat{AOX} agus \widehat{XOB} .

De bhí go bhfuil dronuille cothrom lena cómhúillinn cómhgarai tá suiméiracht taitheambach ag gabháil léi agus is mór an leas a baintear aisti i bhfoitgnócht, léimócht, etc.

5 Bun. Phronnsabal. Teoirimí

Fritheadh amach le tríleacha (in Alt 3) gur féidir an uille á idit na línte 1 is 2, a leagan annas go cruinn

ar an uillinn chothruim eile $\hat{2}$ idir na línte 3 is 4 le casadh an phlána timpeall O . Is féidir aon dá uillinn ag O a chur i gcoirbhneas le chéile ar an gcuma sin, agus níl leaca cothromas ^{is íad} iad ná leagtar níl acu ar an gcuma eile de bharr chosha áirithe timpeall O . Má leagtar líne AB (briodh se díreach nó líbtha) anuas go beacht ar líne eile bD, deirtear go bhfuil na línte sin congruach, nó comhfhada.

Níor mhíste ~~le~~ ^{le} réir an phrionsabail seo a chur ar bun. Prin-Phrionsabail I.

Fanann méad gach uilleann agus fad gach líne buan de bharr an plána a chosadh timpeall ar phointe ar bith ann.

Maidir leis na fírinne geométraíochta gur féidir ^{iad} a ghnóthú ~~on~~ mbun-phrionsabail le réasúnaíocht, is gráthach gur i bhfoirm teoirim a coirítear iad. ^{ghéométraigh} Fá fhuoghair ~~geométraigh~~ agus é toinnte ina dhá chuid, viz. an hipotéis, ina gcuirtear in iúl dúinn róimh ~~re~~ go bhfuil léith áirithe ag an bhfuoghair, agus an tátall, a fhuagraíod gur féidir eolas ar shéith éigin eile a ghnóthú ~~on~~ hipotéis le réasúnaíocht. Cuirtear an réasúnaíocht ar fáil sa geothúnas.

e.g. I dtéirim I seo a leanas, is dtionline a sheasann ar dtionline eile (agus ní ~~h~~ dhá chiorcal, ná ciorcal agus dtionline, etc.) a ghníod an fhuoghair; sin é an hipotéis. ^{Se} an tátall gur ~~f~~ dhá dtionuilleann suim an dá uillinn comhghaach.

De bharr an hipotéis agus an tátall a mbalaíte ar a chéile, gíntear teoirim nua ~~de~~ ^{de} ngoirtear coinvéarsa na cead teoirim. Má's fíor ~~de~~ ^{de} bhéagach don teoirim féin afaeh, ní gá gur fírinne an coinvéarsa.

e.g. Má suimítear dhá uimhir réidh, is uimhir réidh é an tsuim. ^{Fa se} Is fíor é sin; mar shampla tá, $6 + 4 = 10$.

^{Se} ^{a h} coinvéarsa sin ná; ^{suimítear} má's uimhir réidh é suim dhá uimhir, is uimhir réidhe a n. Is léir go bhfuil sé den bhéagach; mar shampla tá $7 + 3 = 10$.

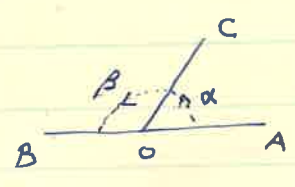
liad

h

hipotéis

Teoirim I

Nuair a sheasann dronlíní ar a-dronlíní eile, is ionann sin an dá mílín chómhgarach agus dhá dhronúillín.



Hipotéis

Dronlíní ~~is ea~~ OC a sheasann ar an dronlín AB.

Tátall

Tá $\hat{\alpha} + \hat{\beta} =$ dhá dhronúillín.

Brathúnas

De bharr an flóra a chasadh timpeall O ~~tré~~ mílín $\hat{\alpha}$, cuirtear OA fan na líne OC.

De bharr chasta eile ~~tré~~ mílín $\hat{\beta}$ ina dhiadh sin, cuirtear OB fan na líne OB.

Fáigean sin go leagtar OA fan OB de bharr an chasta $\hat{\alpha} + \hat{\beta}$.

Ach sin a leath de chasadh ionlán mar is aon dronlíní amháin iad AO, OB.

$\therefore \hat{\alpha} + \hat{\beta} =$ dhá dhronúillín.

Q.E.D.

Is fíor é coinneársa teoirme I, mar atá:

Teoirim I(a)

Má ~~is~~ ionann is dhá dhronúillín sin dhá mílín chómhgarach, tá dhá ghéig in aon dronlíní amháin.

Hipotéis

Tá $\hat{\alpha} + \hat{\beta} =$ dhá dhronúillín, agus dronlíní ~~is ea~~ ^{is ea} OA, OC, OB.

Tátall

Tá AO agus OB in aon dronlíní amháin.

Brathúnas

De bharr an chasta $\hat{\alpha} + \hat{\beta}$ timpeall O, cuirtear OA fan OB.

Sin a leath de chasadh ionlán (de réir ~~na~~ ^{na} hipotéise) rud a leagann

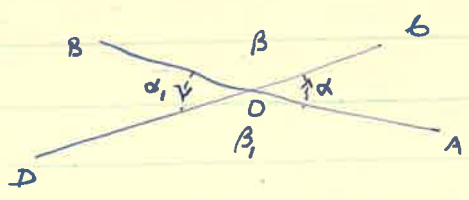
OA ar shíneadh na dronlíní AO.

\therefore aon dronlíní amháin ~~is ea~~ ^{is ea} AO agus OB.

Q.E.D.

Teoirim II

Má theagmháinon dhá dhronlíne le chéile i bpointe O, is ionann gach nílle ag O agus an nílle atá os a cós anonn.



comhar

Hipótéis

Dronlínte theagmhálacha ~~is~~ AOB, BOD.

Tátall

Tá $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}_1$, agus tá $\hat{\beta} = \hat{\beta}_1$.

Brúthúnas

cén plána

Má castar an plána tré dhá dhronuillín timpeall O, cuirfear OA ar an líne OB, agus cuirfear OB ar an líne OD.

1. Leagfar an nílle $\hat{\alpha}$ annas ar an nílín $\hat{\alpha}_1$.

$\therefore \hat{\alpha} = \hat{\alpha}_1$.

Is léir freisin go cuirfear $\hat{\beta}$ ar $\hat{\beta}_1$, ~~ionas~~ go bhfeil $\hat{\beta} = \hat{\beta}_1$.

Q.E.D.

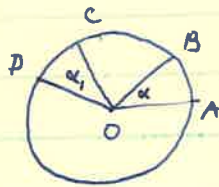
Nota

Maidir leis an téarma "an nílle idir dhá dhronlíne" (e.g. idir na línte AB agus CD sa léaráid) tá éiginnteacht ag baint leis féin amháin nuair nach cuirfear nílleacha atá níos mó ná dhá dhronuillín i bhfáth. Is féidir afach ~~fidir~~fidirheallú idir $\hat{\alpha}$ is $\hat{\beta}$ mar seo; ~~si~~ $\hat{\alpha}$ an nílle deimhneach idir AB is CD (nó an nílle dhiúltach idir CD is AB) de bhíri nach foláir casadh sa t-deimhneach tríd an nílín α , chun BA a leagan ar NE. Is féidir an chéad líne a leagan ar an gceann eile le casadh sa t-dhiúltach freisin tríd an nílín β .

Má is pointe ar bith $\in P$ ar chiorcal gurb $\in O$ a lár, cuirfear P ar phointe éigin eile den chiorcal sin de bharr ~~an~~ chasta timpeall O, de réir bun-phrionsabail I: \therefore is a shleabh-nó fan a imlíne féin a dhéanam gach ciorcal ar lár de O, nuair castar an plána timpeall O.

Teoirim III

I gcioréal ar bith, (i) gearrann uilleasta cothroma ag an lár stuaghanna cõmhada den imlìne, agus (ii) gabhann stuaghanna cõmhada uilleasta cothroma ag an lár.



(i)

(i) Hipotóis

'Sé O lár an $\odot ABCD$, agus tá $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}_1$.

Tátall

Tá an stuagh $AB =$ an stuagh CD .

Bruthúnas

Má castar an plána timpeall O go gcuitear $\hat{\alpha}$ ar a cõhuillín $\hat{\alpha}_1$, gluaisann A ar imlìne an \odot go dtí C , agus gluaisann B go dtí D .

\therefore leagtar an stuagh AB go cruinn ar CD .

\therefore tá na stuaghanna cõmhada.

Q. E. D.

(ii) Hipotóis

'Sé O lár an $\odot ABCD$, agus tá an stuagh $AB =$ an stuagh CD .

Tátall

Tá $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}_1$.

Bruthúnas

Má cuirtear A ar C le casadh timpeall O , gluaisann B go dtí pointe éigin eile ar an imlìne.

\bar{O} tharla an stuagh $AB =$ an stuagh CD , is ar D a chuirtear sé.

\therefore Leagtar an uille $\hat{\alpha}$ ar an uillinn $\hat{\alpha}_1$; $\therefore \hat{\alpha} = \hat{\alpha}_1$.

Q. E. D.

Agora

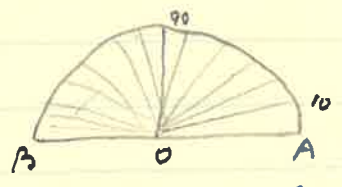
Má's stuaghanna cõmhada rad AB is CD , cõrdai cõmhada isea na cõrdai AB is CD .

mar leagtar an cõrda AB annas ar an geõrda CD .

[Lphosfar bruthúnas i gbaib. III gur fós an coinvearsa].

Nota 1

Baintear feidhm as teoirim III san uilleann torthas .i. áis chun uilleacha a thorthas. Leithcheireal is ea é, agus an imlíne roinnte in 180 cónheoda aige. Tugtar grád (1^a a scriobhtar) ar an uilleann a ghabhas struagh ar bith de na 180 struagheara cónheoda ag an lár. Tagann sin go bhfuil;
 $180^\circ = \text{dhá dhronuilleann.}$

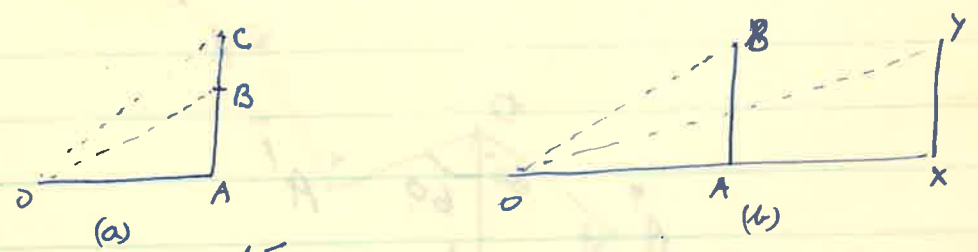


bhun uille a thorthas leagtar O ar rian na huilleann agus coirítear OA (nó OB) chun go luagheann sé ar ghéig amháin. Áirítear an struagh a gheortas an uille ar imlíne an leithcheireail, agus naidh sin rinnteat méad na huilleann.

Nota 2

An té a bhreathnaíonn ar dhá phointe spásúla P agus Q i ndiaidh a chéile, tig leis gairmheas a dhéanamh don uilleann $\hat{P}OQ$ a ghabhas an dronlíne PQ ag a stúil fén O (tré casadh na síle a mheas, is dócha). Tá gléas ag seilbhéara chun an uille sin a thorthas go cruinn.

Is le huilleacha a ndéanann an gnáth-duine faid a mheas. I bhfioghaí (a) is eol do gur fiside AC ná AB de bhri gur mó an uille $\hat{A}OC$ ná a ghabhann AC ag an tstúil O.



Níor cheart dó a cheapadh afach go bhfuil AB níos fiside ná XY, cé gur mó an uille $\hat{A}OB$ ná $\hat{X}OY$, mar is fiside amach naidh XY ná AB anois.

Mar an gcéanna nuair feictear diúinn nach mó an ghealaech ná liathróid peile, b is bun leis sin gur b uilleann té state beagraich an uille a ghabhas an ghealaech ag an tstúil agus an uille a ghabhas liathróid peile a beirtear sa láimh níos.

Tearmaí

Géarúille is ea uille gur léi i ná dronuille; tugtar mao-
uille ar uillinn ^{uile} idir 90° agus 180° .

Uilleacha cóimhlíontacha is ea dhá uillinn gurb íorann is
dronuille a suim, ach má's $\hat{=}$ 180° an tsuim tugtar uilleacha
fóirliúntacha orthu.

Is uille aiséphillteach $\hat{>}$ uille ar bith atá níos mó ná 180° .

bleachtaithe

1) bad i an uille a geasann srathad mhóit an clúig trithi
i gcaitheamh (i) cheathrú uaire, (ii) deich nóiméad, (iii) leath-uaire,
(iv) cúig nóiméad fichead.

2) Ó phointe O tarraingítear ceithre dronlíne OA, OB, OC, OD,
nomus go bhfuil $\hat{A}OB = 25^\circ$, $\hat{B}OC = 130^\circ$, $\hat{C}OD = 50^\circ$, agus uilleacha
deimhneacha is ea rad go léir.

Teastáin go bhfuil OB is OD in aon dronlíne amháin ach
nach bhfuil OA agus OC amhlath. Má súitear OA sruthuigh
go geóimhtríneann sí an uille $\hat{C}OD$.

3) Tá 30° san uillinn $\hat{A}OB$ agus castar an uille sin tré 90°
timpeall O go geuirítear OA fan OC agus go geuirítear OB fan OD.
Faigh (i) an uille $\hat{B}OC$, agus (ii)

Faigh (i) an uille $\hat{B}OC$, (ii) an uille idir OA agus cóimhlíontóir na
h uilleann $\hat{B}OC$.

4) Geasann dhá dhronlíne a chéile ag O, agus cóimhlíneann
dronlíne áirithe eile uille amháin de na cheithre cinn ag O. bruthuigh
go geóimhtríneann sí uille eile ag O san am céanna. Teastáin freisin
go bhfuil sí ingearach le cóimhlíontóir an dá uillinn eile.

5) Tá na pointí A, B, C, D an fhad céanna ó phointe O, agus
tugtar dúinn go bhfuil $\hat{A}OB = \hat{C}OD$. bruthuigh go bhfuil
(i) $AB = CD$, agus (ii) $AC = BD$.

6) castar dronuille \hat{OAX} tré 60° timpeall O. Faigh
amaech le h uilleannantombas an líne go leagtar AX annas
uirchi.