Caibidil V

Fairsinge

Nuair a cuirtear gluaiseacht comhgrúach (.i. casadh, nó scáthú, nó aistriú) i bhfeidhm ar fhioghair phlánaigh, fanann méad agus deilbh na fioghaire sin buan; 'sé an t-ionad a h-athraitear. Sa chaibidil seo taispeánfear gur féidir an deilbh a chlaochló gan an méad a athrú.

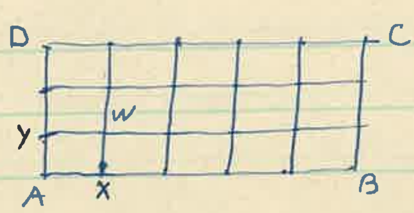
Tugtar *fairsinge* fhioghrach iadta ar mhéad an dromplá a thimpeallaíos a línte teorann.

Chun fairsinge a mheas ní mór aonad fairsinge a thoghadh i dtosach, agus is lena chur i gcóimhmeas leis an aonad sin a déantar fairsinge ar bith eile a thomhas.

Nuair ghnímid aonad faide d'ár rogha dronlíne (e.g. an t-órlach, an tslat, an ceintiméadar, etc.) cinneann sé sin aonad fairsinge san am chéanna .i. fairsinge na cearnóige a bhfuil aonad faide i ngach slios di. Ar an gcuma sin freagraíonn an t-órlach cearnach don órlach faide, agus freagraíonn an tslat chearnach don tslait, etc.

Fairsinge Dhronuilleoige

Tóg dronuilleog ar bith ABCD agus cuir i gcás go bhfuil cómh-míosúr ag na sleasa AB agus AD .i. go bhfuil fad éigin ann (a toghfar mar aonad faide) gurb ionann slánuimhir p díobh as a chéile agus an slios AB, agus go bhfuil slánuimhir eile q díobh as a chéile cómhfhada le AD. Sa léaráid thíos tá $p=5$, $q=3$.



Roinn AB ina 5 cómhchoda, agus tarraing línte // le AD. Roinn AD ina 3 chomhchoda agus tarraing línte // le AB.

Is soiléir gur cearnóg í AXWY, agus gur féidir í a chur anuas go cruinn (de h-aistriú) ar gach aon chearnóig de na 5 X 3 comhchoda ina ngearrtar an dronuilleóg ABCD.

Má glactar le AX mar aonad faide, ionnus gurb iad p agus q faid na slios AB, AD, agus má glactar leis an aonad fairsinge a fhreagraíos do AX .i. an chearnóg AXWY, is follusach go bhfuil $p \times q$ aonaid fhairsinge san dronuilleóig.

∴ Tá fairsinge dronuilleóige = fad × leithead, nuair a fhreagraíos na h-aonaid faide agus fairsinge d'á chéile.

E.g. (1) Má tá an dronuilleóg 5 ór. ar fad agus 3 ór. ar leithead, 'sé $5 \times 3 = 15$ ór. cearnacha an fhairsinge.

(2) Má 'siad $3\frac{1}{2}$ ór. agus $2\frac{3}{4}$ ór. an fhad is an leithead, ní miste $\frac{1}{4}$ ór. a thoghadh mar aonad faide i dtosach, ionnus go bhfuil 14 aonaid díobh sa bhfad agus 11 san leithead.

Fágann sin go bhfuil an fhairsinge = 14×11 de na cearnóga ar slios díobh $1/4$ ór.

Déanann 4×4 de na h-aonaid fhairsinge sin 1 ór. cearnach.

∴ Tá fairsinge na dronuilleoige = $\frac{14 \times 11}{4 \times 4}$ = $3\frac{1}{2} \times 2\frac{3}{4}$ ór. cear.

.i. Feileann an fhormuil fad × leithead don chás.

Fairsinge Pharallélograim

Téarmaí.

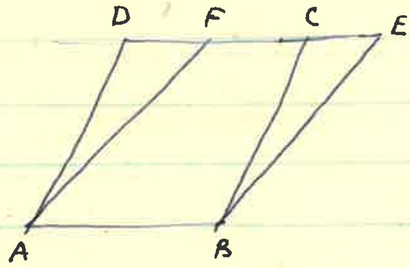
Ní miste an bonn a thabhairt ar shlios ar bith de shleasa an ▱. De bhrí go bhfuil an slios atá ós a chóir parallélach leis, is ~~comhfhada~~ comhfhada na h-ingir go léir a tarraingítear go dtí an bonn ó phointí an tsleasa atá ar a aghaidh. Airde an pharallélograim a tugtar ar ingear ar bith aca.

Má tógtar dhá ▱ fá'n airde chéanna ar aon bhonn amháin, is soiléir go mbeidh na sleasa atá ós cóir an bhoinn in aon dronlíne amháin, agus i ∥ leis an mbonn. Is ar an ábhar sin a tugtar ▱ idir na parallélí céanna ar dhá ▱ den chineál sin.

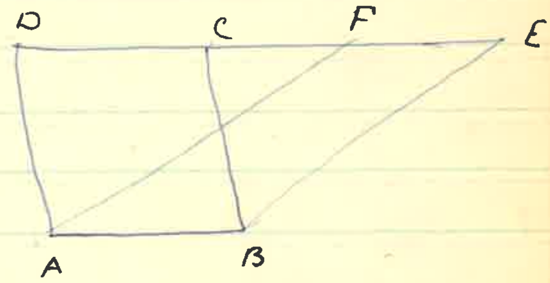
Tugtar airde thriantáin ar an ingear ó'n stuaich ar an mbonn.

Teoirm XVI

Parallélograim chómhfhairsing isea parallélograim fá'n aoirde chéanna atá ar aon bhonn amháin.



fíog. I



fíog. II

Hipotéis Parallélograim isea ABCD, ABEF, agus tá CD agus EF in aon dírlíne amháin.

Tátall Tá ▱ ABCD cómhfhairsing le ▱ ABEF.

Cruthúnas

De bharr an pléna a aistriú ó A go dtí B fan AB, cuirfear AD anuas ar BC, atá = agus // leis (~~Teoirm~~ Cuid IV)

Mar an gceanna, cuirfear AF ar BE.

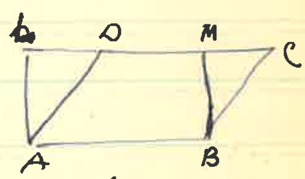
Fágann sin go leagfar an Δ ADF ar an Δ cóngruach BCE, ionnus go bhfuil an dá Δ sin cómhfhairsing.

Ach tá an ▱ ABCD = an fhairsinge ABED − fairsinge an Δ BCE.

Agus tá an ▱ ABEF = an fhairsinge ABED − fairsinge an Δ ADF.

Dá bhrí sin, tá an dá ▱ ABCD agus ABEF cómhfhairsing.

Q.E.D.



Atora 1 Tá fairsinge ▱ = bonn × aoirde

Mar tá ▱ ABCD = fairsinge na ~~an dronlíne~~ dronuilleóige ABML, áit gur iad AL is BM na h-ingir ó A is B ar an líne CD.

Atora 2 Is cómhfhairsing dhá ▱ a tógtar ar bhoinn chothroma agus iad ar aon aoirde.

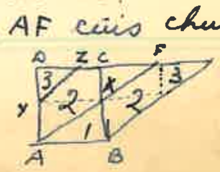
Mar déantar Fíogh I (nó II) díobh nuair leagtar bonn acu ar an mbonn cothrom eile.

Nóta.

Má's cárta é ABCD [fíog. I) is soiléir gur féidir deilbh an ▱ ABEF a chur air, lena ghearradh fan AF agus an Δ AFD a aistriú.

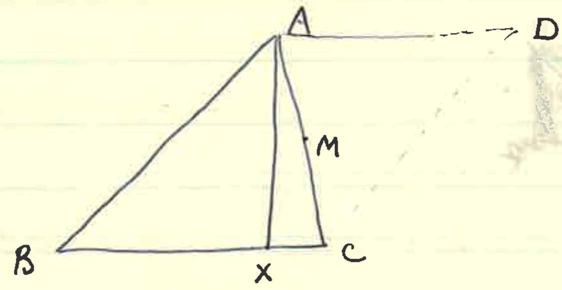
Déanfaidh gearradh ar bith, idir AB is CD, atá // le AF cúis chuige.

I bhFíog. II teastaíonn dhá ghearradh (ar a laghad); viz. fan na línte // AX is YZ.



Teoirim XVII

Is ionann fairsinge thriantáin agus leath-fhairsinge pharallélograim ar bith a tógtar ar an mbonn céanna agus é ar aon aoirde leis an triantán.



Tógáil Tarraing tré C agus A línte a bhéas // le BA is BC, ionnus gur ▱ é BCDA.

Má 'sé AX an t-ingear ó A ar BC is soiléir gurb é AX aoirde an ▱ BCDA, ós aoirde an Δ ABC. Faigh M lár an t-sleasa AC.

Cruthúnas

Le casadh an phlána tré 180° timpeall M, cuirtear an Δ ABC ar an Δ congrúach CDA (Laib IV), ionnus go bhfuil an dá Δ sin cómhfhairsing.

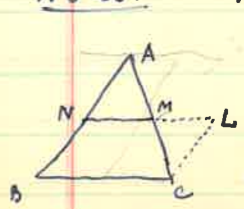
Fágann sin Δ ABC = ½ ▱ BCDA, gurb ionann é maidir le fairsinge agus ▱ ar bith eile a tógtar ar BC fá'n aoirde AX.

Atora 1 Tá fairsinge Δ = ½ (bonn × aoirde)

Atora 2 Is cómhfhairsing dhá Δ fá'n aoirde chéanna atá ar aon bhonn amháin (nó atá ar bhoinn chomhfhada)

Atora 3 Má tá triantáin chómhfhairsinge ar bhoinn chómhfhada, táid ar aon aoirde; agus má tá triantáin chómhfhairsinge ar comhaoirde táid ar bhoinn chómhfhada.

Nóta 1 Triantán a aithdhealbhú ina pharallélogram (agus vice versa)

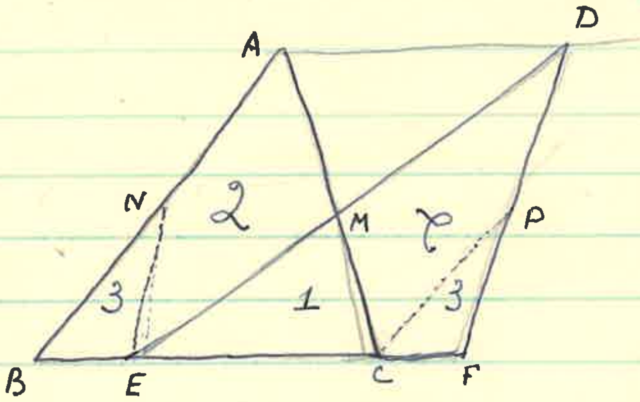


Má 'siad M, N láir na slios AC, AB sa triantán, gearr an Δ fan NM agus cas an píosa AMN tré 180° timpeall M.

[Fágtar fá'n léitheoir a chruthú gur ▱ é BCLN]

Nóta 2

Triantán ABC a aithdhealbhú ina thriantán eile atá ar an mbonn céanna (agus, dá bhrí sin, atá ar aon airde leis).



~~Réiteach~~

Abair gurb iad M, N lár na sleasa AC, AB. Sleamhnuigh bonn an triantán eile ar BC chun go dtéighe an slios DE trí M.

Abair gurb é ~~Atá ise~~ P lár DF.

Tugtar dúinn EF = BC, AD // le BC.

Réiteach

Tá NM = ½BC agus // le BC (Bail IV), agus mar an gcéanna tá MP = ½ EF agus // le EF.

Fágann sin MN = MP, agus aon dronlíne amháin is ea NMP.

∴ Tá NP = agus // le BC, ionas go bhfuil BN = agus // CP, agus mar an gcéanna tá EN = agus // le FP.

Má gearrtar an △ ABC fan EM agus EN, cuirfear BEN ar CFP le h-aistriú, agus cuirfear ANEM ar CPDM le casadh trí 180° timpeall M.

Cleachtaithe

1) Má h-aistrítear △ ABC go dtí an ionad A_1, B_1, C_1, teaspáin (a) gur ▱ a ghineas gach slios san imtheacht dó; (b) go bhfuil dhá ▱ acu le chéile comhfhairsing leis an tríú ceann.

2) Pointe is ea X ar shlios CD na dronuilleóige ~~I dteoirim XV, fig. II, má tá B~~ ABCD, agus 'sé BY an t-ingear ó B ar AX. Cruthuigh AB.AD = AX.BY.

3) Faigh aoirde an ▱ gur bonn dó 2" is go bhfuil 3 or. cear. ina fhairsinge. Má tá an slios eile 3" ar fad, línigh an ▱ agus tomhas na h-uilleacha.

4) Sa Δ ABC, 'sé M lár an bhoinn BC. Cruthuigh go bhfuil fairsinge an Δ AMB $= \frac{1}{2}$ Δ ABC.

5) Sa $\square$ ABCD pointe ar an slios CD isea P. Teaspáin go bhfuil fairsinge an Δ PAB $= \frac{1}{2}$ $\square$ ABCD.

6) Pointí isea P, Q ar shleasa AB, AC an Δ ABC i gcaoi go bhfuil PQ // le BC. Cruthuigh (i) fairsinge Δ PQB = fairsinge Δ PQC: (ii) fairsinge Δ AQB = fairsinge Δ APC.

7) Triantáin chómhfhairsinge isea ABC, DBC, ceann acu ar gach taobh den bhonn BC. 'Siad AX, DY na h-ingir ó A is D ar BC, agus gearrann AD is BC in X.

Cruthuigh (i) AX = DY : (ii) go bhfuil Δ AZX agus Δ DZY congruach: (iii) go bhfuil AZ = ZD.

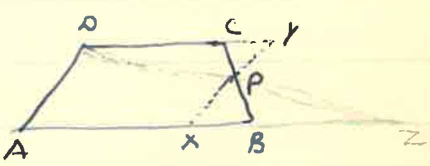
8) I dtriantán ABC isiad M, N lár na slios AB, AC, agus pointe ar bith in MN isea P. Tarraing dronlíne thré C atá // le BP a ghearras MN in Q. Cruthuigh go bhfuil an Δ ABC cómhfhairsing leis an $\square$ BCQP.

~~Tarraing~~ Ar bhonn triantáin ar bith tóg $\square$ a bheas cómhfhairsing leis an triantán, agus uillean a bheith cothrom le h-uillinn áirithe.

9) I gceist 8, má tá P idir M agus N, agus má gearrtar an Δ fan MN agus BP, teaspáin gur féidir an $\square$ BCQP a dhéanamh leis.

Teárma

Tugtar trapésium ar cheathairshleasán ina bhfuil dhá shlios // le chéile.

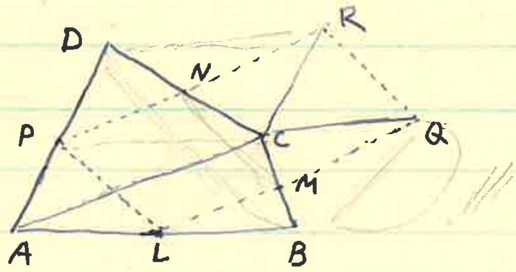


10) 'Sé P lár an t-sleasa BC sa trapésium ABCD, agus tá XPY // le AD.

Cruthuigh (i) go bhfuil ABCD cómhfhairsing leis an $\square$ AXYD: (ii) Má ~~theangmhaíonn~~ ghearrann DP le AB in Z, go bhfuil ABCD cómhfhairsing leis an Δ DAZ: (iii) de bhrí gurb é AB + DC bonn an Δ DAZ, cruthuigh:—

fairsinge trapésium $= \frac{1}{2}$(suim na slios //) $\times$ (an airde ingearach eatortha)

Ceist I Parallélogram a thógáil a bheas cómhfhairsing le ceathairshleasan a tugtar.



Abair gurb é ABCD an 4-shleasán, agus gurb iad L, M, N, P láir na slios.

Réiteach

Tré C tarraing CR // le AD, agus tarraing CQ // le AB. Ceangail QR.
Parallélogram a fheilfeas isea LQRP.

Cruthúnas

▱ isea ACRP atá cómhfhairsing leis an Δ DAC (Teoirim XVI, nóta 1).
Mar an gceánna ▱ isea ACQL atá cómhfhairsing leis an Δ BAC.
∴ Tá ABCD cómhfhairsing le suim an dá ▱ ACRP agus ACQL.
Ach, ó thárla AP = agus // le CR, agus ó thárla AL = agus // le CQ, leagtar an Δ APL ar an Δ CRQ le h-aistriú fan AC.
Fágann sin:-

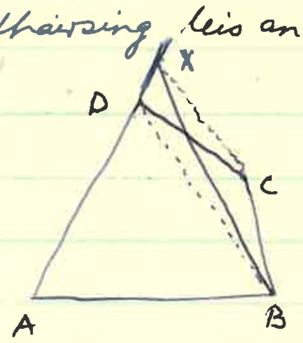
(i) go bhfuil RQ = agus // le PL, ionnas gur ▱ é LQRP;

(ii) go bhfuil an ▱ LQRP = suim an dá ▱ ACRP is ACQL = an 4-shleasán ABCD.

Atora Tá fairsinge 4-shleasáin ar bith cothrom le leath an ▱ go bhfuil a shleasa cómhfhada agus parallélleach le treasnáin an 4-shleasáin.

Mar tá PR = agus // le AC, PL // le BD agus = $\frac{1}{2}$ BD.

Ceist 2. Triantán a thógáil ar shlios cheathairshleasáin a bheas cómhfhairsing leis an gceathairshleasán féin.



Abair gurb é ABCD an 4-shleasán a tugtar.

Réiteach

Bhun $\triangle$ ar AB a thógáil tarraing tré C parallél le BD, a ghearras síneadh AD in X, abair. Ceangail BX.

Tá an $\triangle$ ABX cómhfhairsing le ABCD.

Cruthúnas

Ó thárla XC $\parallel$ le BD, triantáin fán airde chéanna atá ar aon bhonn amháin DB, isea an $\triangle$ XDB agus an $\triangle$ CDB.

$\therefore$ Tá an dá $\triangle$ XDB is CDB cómhfhairsing (Teoirim XVI)

De bharr fairsinge an $\triangle$ DAB a shuimiú leo, gheofar

$\triangle XAB = \triangle DAB + \triangle CDB =$ an 4-shleasán ABCD.

Cleachtaithe

1) Sa bhFigiúr i gCeist 1, cruthuigh gur $\square$ é LMNP atá $= \frac{1}{2}$ ABCD.

2) Má gearrtar an 4-shleasán ABCD fan NP, PL, QM, teaspáin gur féidir an $\square$ PLQR a dhealbhú leis na 4 píosaí.

3) I 4-shleasán ABCD tarraingtear dhá dhronlíne tré B agus D atá $\parallel$ leis an trasnán AC; agus tarraingtear péire eile tré A agus C atá $\parallel$ leis an trasnán BD.

Cruthuigh fán $\square$ a geintear uatha, (i) go bhfuil sé $= 2$ ABCD ina fhairsinge; (ii) gur féidir ABCD a dhealbhú leis na 4 triantáin ag na cóirnéil.

4) I gceathairshleasán ABCD tá X, lár an trasnáin DB taobh istigh den $\triangle$ DAC, agus 'siad N, P láir na shlios CD, DA. Gearrtar an 4-shleasán sin fan NX, DX, PX, AC.

Teaspáin go ngintear $\square$ leis na 4 píosaí nuair

tré 180° castar DPX timpeall P, nuair castar DNX timpeall N, agus nuair a h-aistrítear ABC fan BX.

5) Tarraing Δ ar AB a bheas cómhfhairsing le 4-shleasán ABCD, agus a mbeidh uille ann cothrom le $A\hat{B}C$.

6) Tóg ar AB Δ cómhchosach a bheas cómhfhairsing le ABCD.

7) Má ghearrann BC is AD i bpointe Y, cruthuigh go bhfuil an Δ BYX = an Δ CYD i bhfairsinge [Fiogh. i gceist II]

8) I gceathairshleasán ABCD 'siad L, M, N, P láir na slios AB, BC, CD, DA, agus ceangailtear LM, LN, LP. Castar NLPD tré 180° timpeall N, agus castar LMB tré 180° timpeall M.

De bharr ALP a aistriú fan AC cruthuigh go ngintear Δ a bhfuil dhá shlios ann cothrom agus parallélleach leis na trasnáin AC, BD.

9) Sa 4-shleasán ABCD i gceist I, 'sé K pointe teagmhála PL agus AC, agus gearrtar an 4-shleasán fan PL, NK, MK. Cruthuigh gur féidir Δ a dhealbhú leis na 4 píosaí.

10) Cén chaoi a mba chóir ABCD i gceist II a ghearradh chun an Δ XAB a dhealbhú [Teoirim XV nóta 2, a úsáid]

Ceist 3 Parallélogram a thógáil ar dhronline áirithe a bheas cómhfhairsing le parallélogram eile a tugtar.

Réiteach Ar shlios AB den ▱ ABCD a tugtar, marcáil AX atá cómhfhada leis an dronline áirithe. ~~Fastar~~

Tarraing tré B parallél le XD, a ghearras síneadh AD in Z.

Tá an ▱ AXYZ, atsleasa cómhgaracha dhó AX is AZ, cómhfhairsing le ▱ ABCD.

Cruthúnas

Sa ▱ BLDX tá BL = XD, agus sa ▱ DXMZ tá MZ = XD.

Fágann sin BL = MZ, agus tá BM = LZ freisin.

Ó tharla ZY ∥ le LC, agus YM ∥ CB, cuirtear an Δ CLB anuas go cruinn ar an Δ YZM ~~le~~ de bharr aistriú ó B go dtí M fan BM.

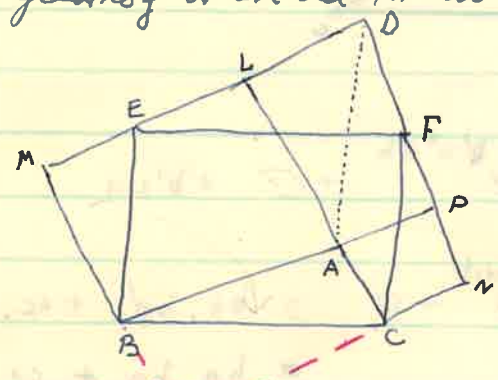
Mar an gcéanna leagtar an Δ MXB ar an Δ ZDL de bharr aistrithe ó B go dtí L fan BL.

Fágann sin gurb fhuil an ▱ ABCD = AXML + Δ CLB + Δ MXB
= AXML + Δ YZM + Δ ZDL = an ▱ AXYZ.

Téarma I dtriantán dronuilleach ~~sé~~ is é an hipoteniús an sleasa atá ar aghaidh na dronuilleann.

Teoirim XVIII (Teoirim Phutagorais)

Is ionann an chearnóg ar hipoteniús thriantáin dronuilligh agus suim na gcearnóg ar an dá shlios eile.



Hipotesis Dronuille ~~isea~~ A sa Δ ABC.

Tógáil Ar AB is AC tóg na cearnóga BALM, ACNP. Déan ME = AC, NF = AB, ~~ionnus~~ A gurb iad BME agus FNC ionaid an Δ BAC arna chasadh tré ~~180~~ 90° timpeall B agus C. Ceangail EF, AD.

Tátall Tá ~~an cheann~~ na cearnóga ar AB is AC le chéile comhfhairsing leis an gcearnóig ar BC

Cruthúnas

'Sé BE ionad BC arna chasadh tré 90° timpeall B.

$\therefore$ Tá BE = BC, agus tá $C\hat{B}E = 90°$.

Mar an gcéanna tá CB = CF, agus tá BCF = 90°.

Fágann sin gurb í BCFE an chearnóg ar BC, agus de thairbhe EF ~~=~~ agus // le BC, ED // le BA, FD // le CA, tá an Δ DEF congrúach leis an Δ BAC san aistriú ó B go dtí E (nó, ó C go dtí F).

Is léir anois go bhfuil

an chearnóg BCEF = an ▱ BEDA + an ▱ CFDA

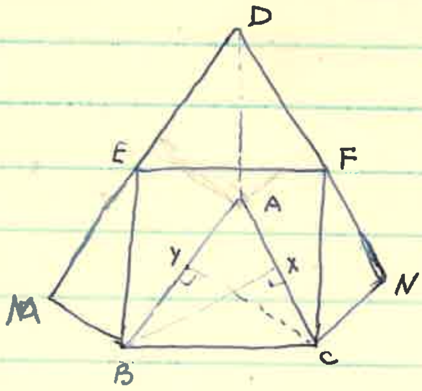
= an chear. BALM + an chear. ACNP (Teoirim XV)

$\therefore$ Tá $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Q.E.D.

Nóta

Má's géaruille í A san △ ABC, abair gurb iad BY is CZ na h-ingir ō B is C ar na sleasa CA agus AB.



Má 'siad BME agus CNF ionaid na dtriantán dronuilleach BYC agus CXB arna gcasadh trí 90° timpeall B agus C leith ar leith, gheofar amach go bhfuil $BC^2 = BA \times BY + CA \times CX$ $= BA^2 + CA^2 - 2t$

Fágann sin go bhfuil BC^2 níos lú ná $AB^2 + AC^2$ sa gcás sin.

Má's maoluille í A áfach, is amhlaí go bhfuil BC^2 níos mó ná $AB^2 + AC^2$.

$t = AY \cdot AB = AX \cdot AC$

Cleachtaithe

1) I gceist 3, teaspáin gur féidir an ▭ AXYZ a dhealbhú ó'n ▭ ABCD arna ghearradh i dtrí píosaí. Leis na píosaí sin dealbhuigh ▭ ar an mbonn BL freisin.

2) I gceist 2 má theagmhaíonn AD is BC le chéile in Z, cruthuigh go bhfuil an △ BZX = △ ZDC.

Mínigh cén chaoi ina dtarraingítear dronlíne trí phointe ar bith B i slios ZC an triantáin ZDC, a ghníos △ le BZ agus ZD a bheas comhfhairsing leis an △ ZDC.

4) Sa △ ABC pointe ar bith sa slios AB is ea X. Tarraing trí X líne a ghníos dhá leith d'fhairsinge an triantáin.

[Ús a bhaint as ceist 3 sa △ ABM, áit gurb é M lár BC]

5) I dtriantán dronuilleach 'siad 5" agus 12" na sleasa; faigh an hipoténús. Má tá hipoténús triantáin dronuilligh 25" ar fad, agus má tá 7" i slios eile, faigh an tríú slios.

6) Tá dréimire ina luighe i gcoinne bhalla. Tá bun an dréimire 8' amach ón mballa agus is $31\frac{1}{2}$' suas an balla a shroiseas sé.

Coinnitear bun an dréimire socair ach iompaitear go dtí taobh eile na sráide an dréimire féin. Má tá an tsráid 36' ar leithead, cá fhaid suas atá barr an dréimire anois?

7) Sa bFíogh. i dTeoirim $\boxed{\text{XVIII}}$, má theagmhaíonn síneadh DA le BC in X, cruthuigh, (i) go bhfuil $AX \perp$ le BC; (ii) $BA^2 = BC.BX$; (iii) $CA^2 = BC.CX$.

8) Más é FZ an t-ingear ó F ar $C\llcorner$, teaspáin (i) gurb é $\llcorner DFZ$ an chearnóg ar AC; (ii) gurb é FZC ionad ina an Δ EMB ama aistriú fan BC

9) Má cuirtear dhá chearnóg pháipéir ABLM agus FDMX taobh le taoibh, mínigh cé'n chaoi a ndealbhaitear an chearnóg BCFE leo ama ngearradh fan BE agus EF.

p > q

10) Más uimhreacha ar bith iad p agus q, teaspáin gur triantán dronuilleach é an triantán ar sleasa dhó $p^2 - q^2$, $2pq$, p^2+q^2. Cé acu sin an hipotenús?