Caibidil VI

Cóimhionannas Triantán. Éagcudromóidí

Cé go bhfuil trí sleasa agus trí h-uilleacha i dtriantán, ní gá na neithe sin go léir a thabhairt chun méad agus deilbh an triantáin a chinneadh: e.g. is leor dhá uillinn a bheith ar eolas chun an ceann eile a áireamh, de bhrí go bhfuil 180° sna trí h-uilleacha le chéile. Taspáinfear sa gcaibidil seo gur leor cnuais áirithe de thrí bhaill den triantán a thabhairt chun gur cinnteach don triantán idir mhéad is deilbh.

Tá fiogracha geóiméadracha cóimhionann le chéile (nó congrúach) má's feidir ceann acu a leagan anuas ar an gceann eile le h-aistriú, nó le casadh, nó le scáthú.

Teoirim ~~XVIII~~ XIX

Chun go mbeadh dhá thriantán congrúach le chéile, is leor:

I go mbeadh dhá shlios i dtriantán acu cómhfhada le dhá shlios sa gceann eile, agus na h-uilleacha a chrioslaíonn gach péire acu sin a bheith ar cómhméad.

Nó,

II go mbeadh na trí sleasa i dtriantán acu cómhfhada le trí sleasa an triantáin eile.

Nó

III go mbeadh dhá uillinn i dtriantán acu cothrom le dhá uillinn
9 sa triantán eile, agus slios amháin sa gcéad triantán a bheith cómhfhada leis an slios a fhreagraíos dó sa gceann eile.

Cás I

Hipotéis Tá $AB = DE$, $AC = DF$, $B\hat{A}C = E\hat{D}F$.

Tátal Triantáin chongrúacha isea iad.

Cruthúnas

Má cuirtear DE fan AB ionnus go dtuiteann D ar A, is ar an bpointe B a thuiteas E de bhrí go bhfuil DE = AB.

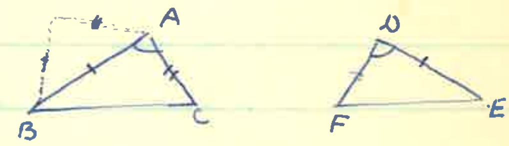
Ó tharla $\hat{B} = \hat{A}$ leagtar DF fan AC; agus de thairbhe DF = AC, is ar an bpointe C a cuirtear F.

∴ Is anuas go cruinn ar an Δ ABC a leagtar an Δ DEF.

Q.E.D

Nota 1 Fágann sin go bhfuil $\hat{E} = \hat{B}$, $\hat{F} = \hat{C}$, EF = BC.

Nota 2. Má tá na h-uilleacha cothroma $B\hat{A}C$ agus $E\hat{D}F$ i dtreóanna contrárdha, is soiléir gur anuas ar scáth an Δ ABC sa slios AB a leagtar an Δ DEF.



Tabhair fá deara gurb iad na sleasa atá ós cóir na n-uilleann gcothrom atá comhfhada, agus gurb iad na h-uilleacha atá ar aghaidh na slios gcomhfhada atá ar comhmheád. Sin é is ciall le h-uilleacha freagarthacha agus le sleasa freagarthacha.

Cás II

Hipotéis Tá AB = DE, AC = DF, BC = EF.

Tátall Δ chongrúacha iseadh ABC agus DEF

Cruthúnas

Leag an ~~Δ DEF~~ slios EF ar an slios comhfhada BC i gcaoi go gcuirtear E ar C, agus go gcuirtear F ar B.

XCB Abair gurb é XCB an t-ionad nua a ghabhas an Δ DEF.

Fágann sin BX = AC, XC = AB, ionnus gur ▱ é BACX.

De thairbhe teóirme XV, ansin is féidir an Δ XCB a leagan anuas ar an Δ ABC le casadh trí 180° timpeall láir BC.

∴ Tá Δ DEF congrúach le Δ XCB, atá congruach le Δ ABC.

Q.E.D

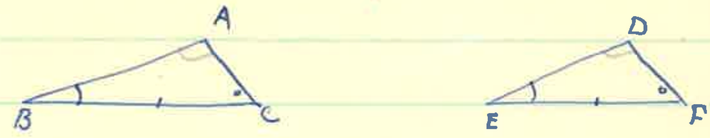
Nóta Má tá treóanna na n-uilleann bhfreagarthach $B\hat{A}C$ agus $E\hat{D}F$ contrárdha ~~dá~~ dá chéile, gheofar amach gur anuas ar scáth an Δ ABC san dronlíne BC a leagtar an Δ DEF.

Cás III

Hipotesis Tá $\hat{B} = \hat{E}$, $\hat{C} = \hat{F}$, BC = EF.

Tátal Δ chongrúacha idir ABC agus DEF.

~~bruth~~



Cruthúnas

Má cuirtear EF fan na líne BC ionnas go bhfuil E ar B, is ar an bpointe C a thuiteas F de bhrí go bhfuil EF = BC.

Ó tharla $\hat{B} = E$ is fan na dronlíne BA a leagtar ED, agus mar an gcéanna cuirtear FD fan na dronlíne CA.

Fágann sin go leagtar D, pointe teagmhála ED is FD ar phointe theagmhála BA is CA; $\therefore$ ar A.

$\therefore$ Leagtar an Δ DEF ar an Δ ABC.

Q.E.D.

Nóta 1. Má 'sé $\hat{B} = \hat{E}$, $\hat{A} = \hat{D}$, BC = EF a tugtar 'sé an cás céanna é, de bhrí go gcaithfidh $\hat{C} = \hat{F}$ ansin de bharr teóirme XIII.

Nóta 2 Is féidir triantán a thógáil nuair is eol dúinn, (i) dhá shlios agus an uille a chrioslaíonn siad, nó (ii) na trí sleasa, nó (iii) dhá uillinn agus slios.

Mar, ar dhronlíne ar bith sa bhplána tig linn mír BC a ghearradh atá comhfhada le slios ar bith a tugtar, agus is féidir an triantán a thógáil ar BC ar bhealach a bheas soiléir don léitheoir gan míniú ar bith. Mar gheall ar an éigcinnteacht fá ionad BC níl aon chuimse lena bhfuil de thriantáin éagsúla a chóimhlíonas na coinníollacha, ach is macasamhla d'á chéile iad uilig de bharr na teóirme.

Cleachtaithe

1) Tarraing Δ ar sleasa dhó 3 ór. agus 2½ ór., agus 30° a bheith san uillinn eatorra.

2) Tarraing Δ ar sleasa dhó 1½", 2", 2½". Cad í an uille atá ós cóir an tsleasa is faide? Cad í an uille is lú?

3) Tarraing Δ fá na h-uilleacha 40°, 60°, 80° nuair sé 3" fad an ~~sleas~~ tsleasa atá ós cóir na h-uilleann is mó.

Triantáin i gcóimhréir.

In áit a bheith cómhfhada, má's i gcóimhréir atá na sleasa a luaitear sa teoirim, tá uilleacha triantáin acu ar cómhméad le h-uilleacha an triantáin eile, ach is i gcóimhréir (de réir an chóimhmeasa chéanna k:1, abair) atá na sleasa. Fágann sin go bhfuil Δ acu ina chóip de réir an scála k:1 den cheann eile.

Gheofar cruthúnas don teora ~~seo~~ úd i gcaib IX, ach ní miste é a luadh annseo mar gheall ar a thábhachtaí is atá sé. Is iomdha leas a bhaineas suilbheára as.

?

Cleachtaithe

1) Tá 100 tr., 72 tr., agus 80 tr. i sleasa Δ áirithe. Línigh an Δ de réir an scála 40 tr. in aghaidh an órlaigh, agus tomhas an uille is mó.

2) Crann bratáigh isea XY, agus pointe ar an talamh cothrom isea P i gcaoi go bhfuil 30 sl. idir P agus bun an chrainn bhratáigh X. Áirítear 20° don uillinn $X\hat{P}Y$. Línigh an Δ dronuilleach PXY de réir an scála 15 sl. in aghaidh 1 ór., agus faigh áirde XY.

3) Trí bailte isea A, B, C. Tá B 20 míle thiar ó A go díreach, ach tá C thiar ó thuaidh de A agus é 35 míle uaidh. Aimsigh fad agus treo na líne BC.

4) Chuaidh duine 10 míle soir ó phointe A. Tar éis dó 6 mhíle soir ó thuaidh a chur de ina dhiaidh sin d'athraigh sé (a) treo arís agus chuaidh sé 5 mhíle siar. Cá fhaide ó bhaile atá sé anois?

5) Pólla telegrafa isea AB, agus ó phointe X ar an mbóthar tuglar fá deara go bhfuil $A\hat{X}B = 30°$. Ag pointe eile Y ar an mbóthar atá níos goire don phólla agus é 30 tr. ó X, tá 50° san uillinn $A\hat{Y}B$. Faigh áirde an phólla go h-athchomair le léaráid a tarraingitear de réir an scála 20 tr. in aghaidh 1".

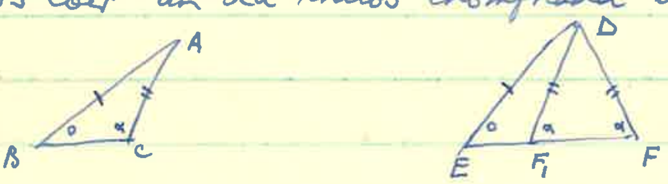
6) Tá dhá lúing X is Y ar farraige, agus pointí ar an gcladach isea A is B ionnus go bhfuil B míle bealaigh thoir ó A go díreach. Ag an bpointe arna céanna tuglar fá deara go bhfuil $X\hat{B}A = 60°$, $Y\hat{B}A = 40°$, $Y\hat{A}B = 80°$, $X\hat{A}B = 45°$.

Faigh fad agus treo na líne ~~AB~~ XY.

7) An Cás Dá-bhríteach

7) Má tá dhá shlios agus uille (atá ós cóir sleasa acu ~~nach í an uille a chrioslaíonn an péire~~) i dtriantán cothrom le dhá shlios agus leis an uillinn fhreagarthaí i dtriantán eile, ní gá don dá thriantán sin a bheith congrúach, cé go bhfeadfadh sé sin a tharlú.

Mara bhfuil siad congrúach áfach, cruthuigh de thairbhe na léaráide thíos gur ~~b~~ uilleacha fóirlíontacha iad ~~isea~~ na h-uilleacha ~~uilleacha~~ atá ós cóir an dá shlios chómhfhada eile.



8) Sa geás dábhritheach má's eol nach bhfuil maoluille i dtriantán ar bith den phéire, cruthuigh go bhfuil na Δ congrúach le chéile.

9) Má's dronuilleacha iad na h-uilleacha cothroma a luaitear i gceist 7, cruthuigh go bhfuil na triantáin congrúach.

Éagcudromóidí

San áit seo breithnítear éagcudromóidí áirithe a shíolraíos den tsonrú gurb í an dronlíne an fhad is giorra idir dhá phointe.

Scríobhtar > in áit "níos mó ná...", agus < in áit "níos lú ná...".

Teoirim ~~XIX~~ XX

I dtriantán ar bith má's mó uille áirithe ná uille eile, is faide an slios atá ar aghaidh na h-uilleann is mó ná an slios atá ar aghaidh na h-uilleann eile; agus, is fíor an coinvéarsa.

Hipotesis Tugtar $\hat{C} > B$.

Tátall Tá $AB > AC$.

Tógáil Déan $B\hat{C}X = \hat{B}$.

Cruthúnas

Tá $CX + XA > AC$ (sonrú dronlíne): agus, tá $CX = BX$ (teoirim V)

$\therefore$ Tá $BX + XA > AC$; $\therefore$ $AB > AC$

Q.E.D.

Nóta Is ionann le chéile a rá go bhfuil $\hat{C} > \hat{B}$, nó go bhfuil A agus C ar aon taobh amháin de ais shiméitreachta BC.

Bhéarfar cruthúnas neamhdhíreach i gcóir an choinvéarsa.

An Coinvéarsa

Hipotesis Tugtar $AB > AC$

Tátall Tá $\hat{C} > \hat{B}$

Cruthúnas Ní fhéadfadh A a bheith ar a.s. BC, gan AB a bheith = AC.

Ní fhéadfadh A is B a bheith ar an taobh chéanna de a.s. BC gan AC a bheith > AB (de réir na teoirme)

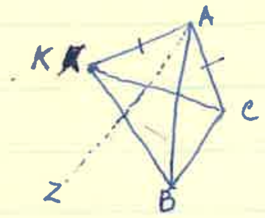
Ach ní thagann tátall acu siúd leis an hipotesis $AB > AC$.

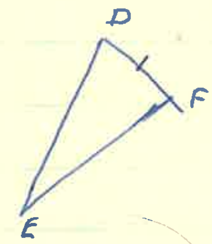
$\therefore$ Is ar aon taobh amháin le C atá A $\therefore$ $\hat{C} > \hat{B}$ Q.E.D

Aliora I dtriantán dronuilleach 'sé an hipotenúse an slios is faide.

Teoirim XX

Tá dhá shlios i dtriantán comhfhada le dhá shlios i dtriantán eile, ach is mó an uille a chrioslaíonn an chéad phéire ná an uille a chrioslaíonn an péire eile. ~~Is fuide bonn~~ Is é an triantáin gurb ann atá an uille is mó an triantán is faide bonn.





Hipotesis Tá $AB = DE$, $AC = DF$, $E\hat{D}F > B\hat{A}C$.

Tátall Tá $EF > BC$.

Cruthúnas Leag an slios DE ar an slios comhfhada AB, agus le seáthú in AB (má's gá é), cuir $\triangle DEF$ san ionad ABK.

Fágann sin $AK = AC$, $KB = EF$, $K\hat{A}B > B\hat{A}C$.

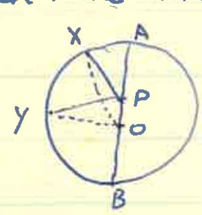
Ó tharla $K\hat{A}B > B\hat{A}C$, tá AZ comhroinnteóir na huilleann KAC, idir AK agus AB.

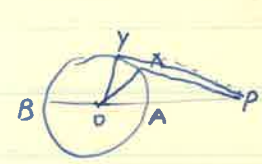
Ach is é AZ a.s. na líne KC (teoirim IV), agus de bhrí go bhfuil B agus C ar an taobh chéanna dhí, tá $BK > BC$ (teoirim XIX)

∴ Tá $EF > BC$

Q.E.D.

Atora I Ó phointe P, má tarraingítear dronlínte difriúla go dtí imlíne ~~chuid~~ chiorcail gurb é O a lár, teigheann an dronlíne is faide agus an dronlíne is giorra díobh ~~suid~~ tré O. Maidir le líne ar bith eile PX de na línte tré P, d'á laghad í an uille $P\hat{O}X$ ~~is~~ sea is giorra an líne sin.

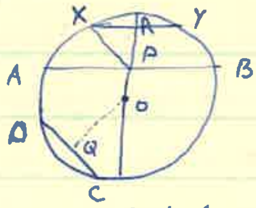




Tá $PX > PA$, de bhrí go bhfuil $OP + PX > OX$ ∴ $OP + PX > OP + PA$.

Tá $PY > PX$, de bhrí go bhfuil OP agus OX comhfhada le OP agus OY, ach is mó an uille $P\hat{O}Y$ ná an uille $P\hat{O}X$.

Atora 2 I gciorcal ar bith má's goire don lár córda amháin ná córda áirithe eile, 'sé an ~~córda~~ chéad chórda acu siúd is ~~fuide~~ faide.



Tugtar $OQ > OP$. Tá le cruthú go bhfuil $AB > CD$.

Cruthúnas

Cas an córda CD timpeall O go gcuirtear OQ ar OR, agus go dtuiteann CD ar an gcórda XY.

Tá $PA > PX$ (atora I), agus tá $PX > XR$ (teoirim XIX, atora)

$\therefore$ Tá $PA > XR$, ionnas go bhfuil $2PA > 2XR$ $\therefore$ $AB > XY$.

Cleachtaithe

1) Cruthuigh go bhfuil slios triantáin níos ~~fuide~~ faide ná an difríocht idir an dá shlios eile.

2) Pointe isea P atá taobh istigh den $\triangle ABC$, agus ~~teagg~~ teag-mhaíonn BP le AC in X. Cruthuigh go bhfuil (i) $AB+AC > BX+XC$, (ii) $BX+XC > BP+PC$, (iii) $AB+AC > BP+PC$.

3) I gceathairshleasán ar bith teaspáin (i) gur mó leath-shuim na slios ná treasnán ar bith den dá threasnán; (ii) gur mó leath-shuim na slios ná suim an dá threasnán.

4) 'Siad P is Q pointí teagmhála dhá chiorcal ar lár dóibh O agus O_1, agus córda dúbailte trí P isea LPM. Tarraingítear na h-ingir OX agus O_1Y ar LPM. Cruthuigh (a) go bhfuil $LM = 2XY$; (b) ~~go~~ go bhfuil $XY < OO_1$, mara bhfuil $LM \parallel$ le OO_1.
Teaspáin cén chaoi a n-aimsítear an córda dúbailte is ~~fuide~~ faide.

5) Má's pointe é P atá taobh istigh de chiorcal gur lár dó O, cruthuigh gurb é an córda atá $\perp$ le OP, an córda is giorra trí P.

6 Sa bparallélogram ABCD maoluille is ea an uille A istigh, ionas gur géaruille í a fóirlíon B. Cruthuigh de thairbhe teoirme II go bhfuil an trasnán BD > AC.

7. I dtriantán ar bith ABC, 'sé M lár BC. Cruthuigh $AB + AC > 2AM$. Le suimiú teaspáin gur faide suim na dtrí slios ná suim na dtrí meánlíne.

8 Sa léaráid i dTr. B Caib. IV cruthuigh $BG = \frac{2}{3} BE$, $CG = \frac{2}{3} CF$. Teaspáin gur faide suim na meánlínte faoi dhó ná suim na slios fá trí.

9. Pointí is ea A, B ar an taobh chéanna de dhronlíne áirithe l, agus pointe ar bith den líne l is ea P. Má 'sé A_1 scáth A in l, agus má ghearrann A_1B an líne l ag C, cruthuigh go bhfuil $AP + PB > A_1B$ (.i. $AP + PB > AC + CB$)

10. Sa Δ ABC 'sé X lár an tsleasa BC. Má tá $AX > BX$ cruthuigh $\hat{B} + \hat{C} > \hat{A}$ agus gur géaruille í A dá réir.

Má tá $AX < BX$, cruthuigh gur maoluille í A.

Céard é an tátal nuair $AX = BX$?

11 Sa Δ ABC gearrann comhroinnteoir $\hat{A}$ an bonn BC in X. Cruthuigh (i) $AB > BX$; $AC > XC$.

Má's faide AB ná AC cruthuigh (le scáthú in AX) gur faide BX ná XC.